



Concours Mathématiques et Physique Corrigé de l'épreuve de Mathématiques II

Questions préliminaires

1. Quelques propriétés du rayon spectral

(a) N est nilpotente alors $Sp(N) = \{0\}$. Donc $Sp(I_n + N) = \{\lambda\}$ et par suite $\rho(A) = |\lambda|$.

(b) (i) Comme A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors A est semblable à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Soit i tel que $\rho(A) = |\lambda_i|$. Comme A^k est semblable à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & a'_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}, \text{ alors,}$$

$\forall j \in \{1, \dots, n\}, |\lambda_j^k| \leq |\lambda_i^k|$. Ainsi, $\rho(A^k) = |\lambda_i^k| = \rho(A)^k$.

(ii) Comme A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $Sp_{\mathbb{C}}(A) = Sp_{\mathbb{R}}(A)$. D'autre part, pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a par définition de $\|\cdot\|_2$, $\|AX\| \leq \|A\|_2 \|X\|$. En particulier pour X vecteur propre réel non nul associé à une valeur propre λ , on obtient $|\lambda| \|X\| \leq \|A\|_2 \|X\|$, ce qui donne $|\lambda| \leq \|A\|_2$. Ainsi, $\rho(A) \leq \|A\|_2$.

(c) $\chi_A(X) = \chi_{A_1}(X) \chi_{A_2}(X)$, alors $Sp_{\mathbb{C}}(A) = Sp_{\mathbb{C}}(A_1) \cup Sp_{\mathbb{C}}(A_2)$. Donc $\rho(A) \geq \max(\rho(A_1), \rho(A_2))$. D'autre part, $\forall \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A), |\lambda| \leq \max(\rho(A_1), \rho(A_2))$, d'où $\rho(A) \leq \max(\rho(A_1), \rho(A_2))$.

2. Décomposition de Schur

(a) $Mat(f, B) = T = (t_{ij})_{i,j}$, avec $t_{ij} = 0, \forall i > j$. Posons $F_i = Vect(e_1, \dots, e_i)$. Alors, $\forall k \in \{1, \dots, i\}$, $f(e_k) = \sum_{j=1}^k t_{jk} e_j \in Vect(e_1, \dots, e_k) \in F_i$. Ainsi, F_i est stable par f .

(b) D'après le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, $Vect(e_1, \dots, e_i) = Vect(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i)$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, d'où $Vect(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i)$ est stable par f et par suite $T = Mat(f, B')$ est triangulaire supérieure.

(c) Soient B_c la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $A = Mat(f, B_c)$ et $P = P_{B_c \rightarrow B'}$. Alors $A = PAP^{-1}$, où P est orthogonale.

1. (a) S est un compact (fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$) et F est continue sur S (application polynômiale).

- (b) **Première méthode :** Les applications $f : X \mapsto AX$ et $g : X \mapsto X$ sont C^1 . De plus, l'application $b = \langle, \rangle$ est bilinéaire donc C^1 . Alors l'application $F : X \mapsto b(f(X), g(X))$ est C^1 et, $\forall H \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} dF(X).H &= db(f, g)(X).H = b(df(X).H, g(X)) + b(f(X), dg(X).H) \\ &= \langle AH, X \rangle + \langle AX, H \rangle = \langle (A + {}^tA)X, H \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, $\nabla F(X) = (A + {}^tA)X$.

Deuxième méthode : On montre que $F(X+H) = \langle AX, X \rangle + \langle AX, H \rangle + \langle AH, X \rangle + \langle AH, H \rangle$ et que $|\langle AH, H \rangle| \leq \|AH\| \|H\| = o(\|H\|)$. Par suite

$$dF(X).H = \langle AH, X \rangle + \langle AX, H \rangle = \langle (A + {}^tA)X, H \rangle.$$

- (c) • On vérifie que :

$\gamma(0) = X_0$, γ est dérivable sur $] -1, 1[$ et $\gamma'(t) = -\|V\|_2 \sin(t\|V\|_2)X_0 + \cos(t\|V\|_2)V$. D'où $\gamma'(0) = V$.

• Comme $X_0 \perp V$, alors $\|\gamma(t)\|_2^2 = \cos^2(t\|V\|_2) + \sin^2(t\|V\|_2) = 1$ et par suite $\gamma(t) \in S, \forall t$.

- (d) Soit $\psi(t) = F(\gamma(t))$. Comme $\gamma(t) \in S, \forall t \in] -1, 1[$, alors $\psi(t) \leq F(X_0) = \psi(0)$, d'où $\psi'(0) = 0$.

- (e) On a : $\psi'(t) = \langle \nabla F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$.

En particulier, $\psi'(0) = \langle \nabla F(X_0), V \rangle = 0$, d'où $\text{Vect}(X_0)^\perp \subseteq (\nabla F(X_0))^\perp$ et par suite $\nabla F(X_0) \in \text{Vect}(X_0)^{\perp\perp} = \text{Vect}(X_0)$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla F(X_0) = \lambda X_0$.

- (f) • On a : $\nabla F(X_0) = ({}^tA + A)X_0 = \lambda X_0$ et $X_0 \neq 0$. Ainsi, λ est une valeur propre de $({}^tA + A)$.

• Comme $({}^tA + A)X_0 = \lambda X_0$, alors $\langle ({}^tA + A)X_0, X_0 \rangle = \lambda$ et ceci est équivalent à $2 \langle AX_0, X_0 \rangle = \lambda$, c'est à dire $\langle AX_0, X_0 \rangle = \frac{1}{2}\lambda$.

2. On a montré dans Q1 qu'il existe $X_0 \in S$ et λ valeur propre de $({}^tA + A)$ tel que, $\forall X \in S$,

$$\langle AX, X \rangle = F(X) \leq F(X_0) = \frac{1}{2}\lambda \leq \frac{1}{2}\rho({}^tA + A).$$

En appliquant ce qui précède à $-A$, on montre qu'il existe μ valeur propre de $(-{}^tA - A)$ tel que, $\forall X \in S$,

$$-\langle AX, X \rangle = \langle -AX, X \rangle \leq \frac{1}{2}\mu \leq \frac{1}{2}\rho(-{}^tA - A) = \frac{1}{2}\rho({}^tA + A).$$

Ainsi, $\forall X \in S, |\langle AX, X \rangle| \leq \frac{1}{2}\rho({}^tA + A)$.

D'autre part, soit $\lambda \in S_p({}^tA + A)$ tel que $|\lambda| = \rho({}^tA + A)$. Alors, il existe $Y \in S$ tel que $({}^tA + A)Y = \lambda Y$, d'où $2 \langle AY, Y \rangle = \langle ({}^tA + A)Y, Y \rangle = \lambda$, c'est à dire $\frac{1}{2}\rho({}^tA + A) = \frac{1}{2}|\lambda| = |\langle AY, Y \rangle|$. Conclusion, $\frac{1}{2}\rho({}^tA + A) = \max_{X \in S} |\langle AX, X \rangle|$.

3. On applique Q2, en remplaçant A par tAA .

4. (a) On vérifie que ${}^tAA = \text{diag}({}^tA_1A_1, {}^tA_2A_2)$. D'après Q 1-c- partie préliminaire, on aura :

$$\|A\|_2^2 = \rho({}^tAA) = \max(\rho({}^tA_1A_1), \rho({}^tA_2A_2)) = \max(\|A_1\|_2^2, \|A_2\|_2^2).$$

(b) Si A est symétrique, alors, d'après Q 3-partie I et Q 1-b- partie préliminaire, on aura :

$$\sqrt{\rho(A^2)} = \rho(A) = \|A\|_2.$$

Partie II : La formule de Gelfand

1. Si A est nilpotente, alors $S_{p_{\mathbb{C}}}(A) = \{0\}$ et $A^k = 0, \forall k \geq n$. D'où $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|_2^{\frac{1}{k}} = 0 = \rho(A)$.

2. (a) Comme I_n et N commutent, alors $A^k = (\lambda I_n + N)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i \lambda^{k-i} N^i = \sum_{i=0}^{n-1} C_k^i \lambda^{k-i} N^i$.

Comme $C_k^i \leq k^n$ pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$, alors

$$\|A^k\|_2 \leq |\lambda|^{k-n} k^n \sum_{i=0}^{n-1} |\lambda|^{n-i} \|N^i\|_2$$

(b) Pour $k \geq n$, on a :

$$|\lambda| \leq \|A^k\|_2^{\frac{1}{k}} \leq |\lambda|^{\frac{k-n}{k}} k^{\frac{n}{k}} \left(\sum_{i=0}^{n-1} |\lambda|^{n-i} \|N^i\|_2 \right)^{\frac{1}{k}}$$

Ainsi, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|_2^{\frac{1}{k}} = |\lambda| = \rho(A)$.

3. Si $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_s)$, alors $A^k = \text{diag}(A_1^k, \dots, A_s^k)$. D'après Q 4-Partie I, on obtient :

$$\|A^k\|_2^{\frac{1}{k}} = \max(\|A_1^k\|_2^{\frac{1}{k}}, \dots, \|A_s^k\|_2^{\frac{1}{k}}).$$

En passant à la limite lorsque $k \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|_2^{\frac{1}{k}} &= \max\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A_1^k\|_2^{\frac{1}{k}}, \dots, \lim_{k \rightarrow +\infty} \|A_s^k\|_2^{\frac{1}{k}}\right) \\ &= \max(\rho(A_1), \dots, \rho(A_s)) = \rho(A). \end{aligned}$$

4. (a) $\forall i \neq j$, on a $(X - \lambda_i) \wedge (X - \lambda_j) = 1$. Puis on applique le lemme de décomposition des noyaux et le théorème de C-H.

(b) • $(f - \lambda_i \text{id}_{\mathbb{R}^n})^{m_i}$ et f commutent, d'où F_i est stable par f .

• Soit $u_i = f_{F_i} - \lambda_i \text{id}_{F_i} \in \mathcal{L}(F_i)$. Alors, $\forall x \in F_i$, $(f - \lambda_i \text{id}_{\mathbb{R}^n})^{m_i}(x) = 0$, d'où $u_i^{m_i} = (f_{F_i} - \lambda_i \text{id}_{F_i})^{m_i} = 0$, ce qui montre que l'endomorphisme u_i est nilpotent.

(c) Pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, on pose $p_i = \dim F_i$ et B_i une base de F_i . Soit $N_i = \text{Mat}(u_i, B_i)$, alors la matrice N_i est nilpotente et donc $A_i := \text{Mat}(f_i, B_i) = \lambda_i I_{p_i} + N_i$. Si on considère $B = \bigcup_{i=1}^s B_i$, alors $\text{Mat}(f, B) = \text{diag}(A_1, \dots, A_s) := \tilde{A}$. Ainsi, $A = P \tilde{A} P^{-1}$, où $P = P_{B_C \rightarrow B}$.

(d) $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = P \tilde{A}^k P^{-1}$. Alors

$$\|A^k\|_2 \leq \|P\|_2 \|\tilde{A}^k\|_2 \|P^{-1}\|_2,$$

ce qui donne $\|A^k\|_2^{\frac{1}{k}} \leq \|P\|_2^{\frac{1}{k}} \|P^{-1}\|_2^{\frac{1}{k}} \|\tilde{A}^k\|_2^{\frac{1}{k}}$. De même, puisque $\tilde{A}^k = P^{-1} A^k P$, on obtient

$$\|\tilde{A}^k\|_2^{\frac{1}{k}} \leq \|P^{-1}\|_2^{\frac{1}{k}} \|P\|_2^{\frac{1}{k}} \|A^k\|_2^{\frac{1}{k}},$$

d'où $(**) \|P^{-1}\|_2^{-\frac{1}{k}} \|P\|_2^{-\frac{1}{k}} \|\tilde{A}^k\|_2^{\frac{1}{k}} \leq \|A^k\|_2^{\frac{1}{k}}$.

(e) En passant à la limite dans $(**)$ lorsque $k \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\rho(A) = \rho(\tilde{A}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\tilde{A}^k\|_2^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|_2^{\frac{1}{k}}.$$

Partie III : Matrices radiales

1. I_n est radiale.

2. On vérifie que : $\rho(A) = 0$ et $\|A\|_2 > 0$, d'où A n'est pas radiale.

3. (a) Comme $\rho(A) \leq \|A\|_2$, alors

$$A \text{ est radiale} \iff \rho(A) = \|A\|_2 \iff \rho(A) \geq \|A\|_2.$$

(b) A est radiale, alors $\rho(A^k) = \rho(A)^k = \|A\|_2^k \geq \|A^k\|_2$. Donc A^k est radiale.

(c)

$$A \text{ est radiale} \iff \|A\|_2 \leq \rho(A)$$

$$\iff \forall X \in \mathbb{R}^n, \|AX\|_2 \leq \rho(A) \|X\|$$

$$\iff \forall X \in \mathbb{R}^n, \|AX\|_2^2 \leq \rho(A^2) \|X\|^2$$

$$\iff \forall X \in \mathbb{R}^n, \langle \rho(A^2)X - {}^t A A X, X \rangle \geq 0$$

$$\iff \rho(A^2)I_n - {}^t A A \in S_n^+(\mathbb{R}).$$

(d) On vérifie que $\rho(A) = \sqrt{ab}$ et que $\rho(A^2)I_2 - {}^tAA = \begin{pmatrix} b^2 - ab & 0 \\ 0 & a^2 - ab \end{pmatrix}$. D'où

$$\rho(A^2)I_2 - {}^tAA \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (b(b-a) \geq 0 \text{ et } a(a-b) \geq 0) \Leftrightarrow a = b.$$

(e) $\mathcal{P}(A \text{ est radiale}) = \mathcal{P}(X=Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(X=i, Y=i)$. Comme X et Y sont indépendantes, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X=Y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(X=i) \mathcal{P}(Y=i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} p^2 (1-p)^{2i-2} = p^2 \sum_{i=1}^{\infty} ((1-p)^2)^{i-1} \\ &= \frac{p^2}{1 - (1-p)^2} = \frac{p}{2-p}. \end{aligned}$$

4. • Supposons que A est radiale, alors $\|A\|_2^k = \rho(A)^k = \rho(A^k) = \|A^k\|_2$.
 • Supposons que $\|A\|_2^k = \|A^k\|_2$, alors

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|_2^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|A\|_2^{\frac{k}{k}} = \|A\|_2.$$

5. La décomposition de Schur montre que

$$A \text{ est orthogonalement semblable à } T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ (a_{ij}) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

- A est radiale signifie que T est radiale, car $\rho(A) = \rho(T)$.
- $\forall i \in \{1, \dots, s\}$, on a : $\|Te_i\|_2 \leq \|T\|_2 = \rho(T) = |\lambda_1|$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. D'où $\|Te_i\|_2^2 \leq |\lambda_1|^2$. D'autre part, $Te_i = \lambda_i e_i + \sum_{j=i+1}^n a_{ji} e_j$, ce qui donne $\|Te_i\|_2^2 = |\lambda_i|^2 +$

$\sum_{j=i+1}^n a_{ji}^2 \leq |\lambda_i|^2$, ceci $\forall i \in \{1, \dots, s\}$. Donc $a_{ji} = 0$, $\forall i \in \{1, \dots, s\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$. Par conséquent :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s \\ (0) & & B \end{pmatrix}, \text{ où } B = \begin{pmatrix} \lambda_{s+1} & (0) \\ & \ddots \\ (b_{ij}) & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

• Montrons que $\rho(A)^2 I_{n-s} - {}^t B B \in \mathcal{S}_{n-s}^+(\mathbb{R})$. On vérifie que :

$$\rho(A)^2 I_n - {}^t T T = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \\ & & & \rho(A)^2 I_{n-s} - {}^t B B \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),$$

ce qui implique que $\rho(A)^2 I_{n-s} - {}^t B B \in \mathcal{S}_{n-s}^+(\mathbb{R})$.

• Inversement, supposons que A est orthogonalement semblable à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s \\ (0) & & B \end{pmatrix}$$

telle que $\rho(A)^2 I_{n-s} - {}^t B B \in \mathcal{S}_{n-s}^+(\mathbb{R})$. Alors

$$\rho(A)^2 I_n - {}^t A A \text{ est orthogonalement semblable à } \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \\ & & & \rho(A)^2 I_{n-s} - {}^t B B \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),$$

ce qui donne que A est radiale.

6. $\chi_M(X) = (X-1)X^2$, donc $Sp(M) = \{0, 1\}$ et par suite $\rho(M) = 1$.

De plus, on vérifie que $I_3 - {}^t M M = \text{diag}(0, 0, 1) \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$, d'où M est radiale. D'autre part, M n'est pas diagonalisable puisque $\dim \ker(M) = 1$ et 0 est une valeur propre de multiplicité 2.